Chapitre 5 : Ensembles de nombres

Nombres réels

Exercice 1: Soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de réels compris entre 0 et 1.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Exercice 2: Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels la fonction polynomiale $P : x \mapsto (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m + 6$ est négative.

Exercice 3: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\prod_{k=1}^{n} 2k \text{ et en déduire que } \frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{2}.$$

Exercice 4: Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue réelle x :

1. $(x-1)^2 \leqslant 1$
2. $x \leqslant \frac{1}{x}$
3. $(x^2+x-2)^2 \leqslant x(x+1)$
4. $x \leqslant \sqrt{2(x+1)}$

Exercice 5: Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
On pose $A+B = \{a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$. Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 6: Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue réelle x :

1. $|x+2| \leqslant 5$
2. $|3-x| = x+1$
3. $|x^2-3x+3| = x-1$
4. $|x^2-4x+3| < x-1$
5. $|x| + |x+1| = 2$
6. $2 < |x+1| < 3$

Exercice 7: Montrer que $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$

Exercice 8: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$$

est 1-périodique. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Nombres entiers

Exercice 9: Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note r le reste dans la division euclidienne de $a-1$ par b.
Déterminez le reste dans la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice 10: Montrer que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11: Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $xy = 2x + y$.

Exercice 12: Calculer le PGCD de 230 et 126 à l'aide de la décomposition en facteurs premiers puis retrouvez le résultat grâce à l'algorithme d'Euclide.

Exercice 13: Quel est le nombre de diviseurs de 360 ? de 17 500 ? Calculer le plus grand diviseur commun et le plus petit multiple commun de ces deux nombres.

Exercice 14: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que l'on peut trouver n entiers consécutifs composés.
On pourra introduire $k \in [\![2, n+1]\!]$ et s'intéresser à la primalité de $(n+1)!+k$.

Exercice 15: Trouver tous les couples (a,b) de $\mathbb{N}^2$ tels que $a \wedge b = 153$ et $a \vee b = 42075$.

Exercice 16: Montrer que le cube d'un entier positif peut toujours s'écrire comme la différence de deux carrés.

Exercice 17: Soient a, n, p, q des entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Montrer que $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$.
2. En déduire que si $2^n - 1$ est premier alors n est aussi premier.
   Remarque : la réciproque n'est pas forcément vraie : $2^{11} - 1$ n'est pas premier. Néanmoins, les nombres de Mersenne (de la forme $2^n - 1$) permettent de trouver de très grands nombres premiers, le plus grand connu à ce jour étant $2^{82\,589\,933} - 1$, un nombre qui compte 24862048 chiffres (en base 10), c.f. `www.mersenne.org`.
3. Démontrer que si $a^n - 1$ est premier alors n est premier et $a = 2$.

Applications

Exercice 18: *Trésor de Barbe noire*
On vient de retrouver un parchemin attribué à Barbe Noire. Sur ce parchemin, figure le plan d'une île avec à côté le message qui suit :
Sur la ligne qui passe par le cocotier et le mât, un trésor j'ai caché. Deux fois la distance du trésor au mât, plus trois fois la distance du trésor au cocotier est égal à 65 pas. De plus, 30 pas j'ai compté entre le mât et le cocotier.
Vous vous rendez donc sur l'île pour retrouver le trésor. Malheureusement, des pirates vous ont devancés et ont creusé une tranchée entre le mât et le cocotier. Cependant, ils n'ont rien trouvé. Barbe Noire a-t-il dit la vérité ? Et si oui, où se situe son trésor ?

Exercice 19: *Une histoire d'ampoules*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un groupe de n personnes est dans une salle contenant des interrupteurs numérotés de 1 à n liés à n ampoules. Initialement, toutes les ampoules sont éteintes.

- La première personne appuie sur tous les interrupteurs ;
- la seconde appuie sur les interrupteurs pairs ;
- la troisième appuie sur les interrupteurs multiples de 3 ;
- la quatrième appuie sur les interrupteurs multiples de 4 ...

Quelles ampoules sont allumées quand la dernière personne appuie sur le n-ième interrupteur ?