TD 5 : Ensembles de nombres

Nombres réels

Exercice 1: Soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de réels compris entre 0 et 1.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Exercice 2: Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels la fonction polynomiale $P : x \mapsto (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m + 6$ est négative.

Exercice 3: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\prod_{k=1}^{n} 2k \text{ et en déduire que } \frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{2}.$$

Exercice 4: Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue réelle x :

1. $(x-1)^2 \leqslant 1$
2. $x \leqslant \frac{1}{x}$
3. $(x^2+x-2)^2 \leqslant x(x+1)$
4. $x \leqslant \sqrt{2(x+1)}$

Exercice 5: Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
On pose $A + B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 6: Soit $f : x \mapsto |x+1| - |2x-2|$.

1. Donner une expression de f sans utiliser la valeur absolue.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 1$ d'inconnue réelle x.
3. Tracer la courbe représentative de f et mettre en évidence l'ensemble des solutions trouvées dans la question précédente.

Exercice 7: Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue réelle x :

1. $|x+2| \leqslant 5$
2. $|3-x| = x+1$
3. $|x^2-3x+3| = x-1$
4. $|x^2-4x+3| < x-1$
5. $|x| + |x+1| = 1$
6. $2 < |x+1| < 3$

Exercice 8: Montrer que $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$

Exercice 9: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$$

est 1-périodique. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Nombres entiers

Exercice 10: Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note r le reste dans la division euclidienne de $a-1$ par b.
Déterminez le reste dans la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice 11: Montrer que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12: Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $xy = 2x + y$.

Exercice 13: Calculer le PGCD de 230 et 126 à l'aide de la décomposition en facteurs premiers puis retrouvez le résultat grâce à l'algorithme d'Euclide.

Exercice 14: Quel est le nombre de diviseurs de 360 ? de 17 500 ? Calculer le plus grand diviseur commun et le plus petit multiple commun de ces deux nombres.

Exercice 15: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que l'on peut trouver n entiers consécutifs composés.
On pourra introduire $k \in [\![2, n+1]\!]$ et s'intéresser à la primalité de $(n+1)!+k$.

Exercice 16: Trouver tous les couples (a,b) de $\mathbb{N}^2$ tels que $a \wedge b = 153$ et $a \vee b = 42075$.

Exercice 17: Montrer que le cube d'un entier peut toujours s'écrire comme la différence de deux carrés.

Exercice 18: Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

1. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est aussi premier.
   La réciproque n'est pas forcément vraie : $2^{11} - 1$ n'est pas premier. Néanmoins, les nombres de Mersenne (de la forme $2^n - 1$) permettent de trouver de très grands nombres premiers, le plus grand connu à ce jour étant $2^{136\,279\,841} - 1$, un nombre qui compte $41\,024\,320$ chiffres (en base 10), c.f. `www.mersenne.org`.

2. On dit qu'un entier naturel est parfait lorsqu'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts. Ainsi, 6 est parfait car $6 = 1 + 2 + 3$.
   Démontrer que si $2^n - 1$ est premier alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait.

Applications

Exercice 19: *Trésor de Gol D. Roger*
On vient de retrouver un parchemin attribué à Gol D. Roger. Sur ce parchemin, figure le plan d'une île avec à côté le message qui suit :
Sur la ligne qui passe par le cocotier et le mât, un trésor j'ai caché. Deux fois la distance du trésor au mât, plus trois fois la distance du trésor au cocotier est égal à 65 pas. De plus, 30 pas j'ai compté entre le mât et le cocotier.
Vous vous rendez donc sur l'île pour retrouver le trésor. Malheureusement, des pirates vous ont devancés et ont creusé une tranchée entre le mât et le cocotier. Cependant, ils n'ont rien trouvé. Gol D. Roger a-t-il dit la vérité ? Et si oui, où se situe son trésor ?

Exercice 20: *Une histoire d'ampoules*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un groupe de n personnes est dans une salle contenant des interrupteurs numérotés de 1 à n liés à n ampoules. Initialement, toutes les ampoules sont éteintes.
La première personne appuie sur tous les interrupteurs ; la seconde appuie sur les interrupteurs pairs ; la troisième appuie sur les interrupteurs multiples de 3 ; la quatrième appuie sur les interrupteurs multiples de 4 ...
Quelles ampoules sont allumées quand la dernière personne appuie sur le n-ième interrupteur ?